D'où viennent les logarithmes

Les 16[e] et 17[e] siècles sont marqués par de grandes découvertes astronomiques, grâce aux travaux de : Nicolas Copernic, Tycho Brahe, Römer, Johannes Kepler, Galilée,. ………………., puis enfin Newton.

On notera, entre autres, la découverte des taches solaires (Galilée) mettant ainsi fin à la subdivision du ciel en deux parties : le monde céleste et le monde sublunaire. Le soleil a des taches. Il n'est donc pas parfait, ni harmonieux ; par conséquent, il ne se distingue pas du monde sublunaire. Ce qui est *en haut* est identique à ce qui est *en bas*.
On notera aussi la découverte de la vitesse finie de la lumière (Römer) par l'observation des satellites de Jupiter.

Toute cette effervescence nécessita de long et laborieux calculs, trigonométriques notamment (observer les astres, noter les positions, calculer les périodes, les phases etc.).

Comment simplifier les calculs des astronomes ?

Considérons les deux lignes suivantes :

0	1	2	3	4	5
1	2	4	8	16	32

La première ligne s'appelle une série arithmétique, la deuxième une série géométrique. On remarque que l'addition sur la première ligne correspond à une multiplication dans la deuxième.

En effet : $2+3=5$ *et* $4 \cdot 8 = 32$
Il y a correspondance terme à terme.

0	1	2	3	4	5
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5

En langage moderne :
On constate que la première ligne est le logarithme en base 2 de la deuxième.

En effet : $\log_2(16) = 4$

On retrouve la règle vue au cours :

$$\boxed{\log_2(a \cdot b) = \log_2(a) + \log_2(b)}$$

Ou encore, les multiplications se transforment en additions. De même, on a :

$$\boxed{\log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \log_2(a) - \log_2(b)}$$

Les divisions se transforment en soustractions.

La base 2 n'est toutefois pas très utile, car elle laisse des trous dans les nombres :
1 – 2 – 4 – 8 – 16 – etc.

Les mathématiciens ont donc choisi des bases plus adéquates et construit des tables logarithmiques à disposition des scientifiques de l'époque.
L'observation de cette correspondance entre série arithmétique et série géométrique se trouve déjà chez Archimède (287-212 av. JC) dans son traité l'Arénaire. Cette correspondance fut étendue aux exposants négatifs et rationnels par Michael Stifel (1544), mais la notion de logarithme ne se développe vraiment qu'au XVIIe avec les travaux de **John Napier** (Ecossais) et **Joost Bürgi** (Suisse).

John Napier (1550-1617)

Mathématicien écossais, John Napier ou Neper, baron de Merchiston, passa la majeure partie de sa vie dans le manoir familial de Merchiston (près d'Edimbourg) où il naquit et mourut. Violemment anticatholique, il se consacra aux luttes politiques et religieuses de son temps.
En plus de la découverte des logarithmes, on lui doit une méthode pour effectuer d'une façon mécanique les opérations de multiplication, de division et d'extraction de racines carrées : *Rabdologiae seu numerationis per virgula libri,1617)*
(du grec *rhabdos* = *baguette, réglette* et *logos* = (science du) *calcul*) et sur la numération avec virgule.

Les deux *livres*
John Napier :« Mirifici logarithorum canonis descriptio »
Edimbourg 1614
Joost Bürgi : « Aritmetische und geometrische Progresstabulen »
Prague 1620.

L'idée de Neper et de Bürgi est d'introduire des nombres intercalaires en quantité suffisante pour permettre un passage « continu » d'une progression à l'autre. Ceci fait, les deux construisent des tables avec ces progressions.

L'idée de Neper
Neper construit ses tables sur l'expression suivante :
$10^7(1-10^{-7})^n$, pour n = 0, 1, 2, …., 100.
Il nomme les nombres 0, 1, 2, …., 100, les logarithmes des nombres obtenus.
La construction se fait facilement par soustraction en utilisant le fait que :

$$(1-10^{-7})^{n+1} = (1-10^{-7})^n(1-10^{-7})$$

Ainsi :
Pour n = 0, on obtient : 10^7
Pour n = 1, on obtient : $10^7 - 1 = 9999999$

Pour n = 2, on obtient :

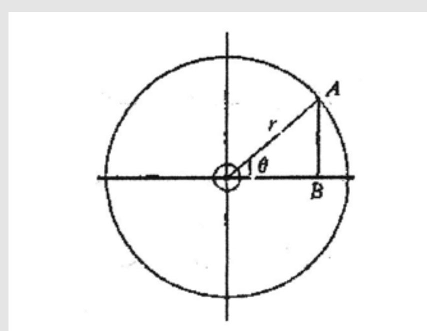
$$10^7(1-10^{-7})^2 = 9999999(1-10^{-7}) =$$
$$9999999 - 0.9999999 = 9999998.0000001$$

etc.

Neper connaissait des formules du type :
2sin(A)sin(B) = cos(A-B)-cos(A+B),
où un produit de deux fonctions s'écrit comme une somme (ici une soustraction).
Cette formule était semble-t-il utilisée par Tycho Brahe. On notera également l'identité :
$4AB = (A+B)^2 - (A-B)^2$
Ce sont ces transformations d'opérations qu'il étudia à l'aide de la cinématique.
c.f. 1 ou 3.

La motivation de Neper était de simplifier les calculs intervenant dans les solutions des triangles, particulièrement les triangles sphériques qui étaient essentiels en astronomie. A l'époque de Neper, le sinus d'un angle n'était pas défini par un rapport. C'était la longueur d'un côté d'un triangle rectangle.

De manière plus précise, soit le cercle de rayon r et soit l'angle α, le $\sin(\alpha)$ était défini comme la longueur AB



Le fait que le sinus change avec la grandeur du rayon n'avait pas grande importance !

Neper chercha d'abord à construire le logarithme de $\sin(\alpha)$

Joost Bürgi

Né le 28 février 1552 au Lichtenstein, et mort le 31 janvier 1632 à Kassel, Hesse-Kassel
Bürgi fut un habile horloger ainsi qu'un astronome de premier rang. C'est à lui que Kepler doit des développements utiles en algèbre. Et en contrepartie, c'est Kepler qui encouragea Bürgi à publier son ouvrage sur les logarithmes (1620)

Bürgi choisit l'expression suivante :

$$10^8(1+10^{-4})$$

Il faut encore mentionner d'autres personnes :

Henry Briggs (Arithmetica logarithmica , 1624) qui travailla avec Neper

Nicolas Mercator (1620-1687) qui trouva la fameuse série :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

Isaac Newton (1642-1727) qui mit en évidence une relation entre l'aire sous l'hyperbole et les logarithmes.

Leonhard Euler (1707-1783) qui introduit la base « e »

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

$$e = 2,71828182845904523536028............$$

logarithmes : le terme est de Neper , du grec *logos* = logique, raison et *arithmos* = nombre)

JCA de Saussure 2003

Sources :

1.- The Historical Development of the Calculus
C.H. Edwards, Jr
Springer – Verlag 79, ISBN 0-387-90436-0
Se trouve à la bibliothèque

2.- Encyclopaedia Universalis.

3.- What is a Napierian Logarithm ?
R. Abyoub The Americam Math Monthly
Vol 100 No 4.(Apr. 1993) p.351-364